第 47 講　整数の性質(1)

【基礎確認事項】

[1]　約数，倍数

□２つの整数 a，b について，整数 k を用いて　$b=ak$　と表されるとき，a は b の**約数**といい，b は a の**倍数**であるという．このとき，$\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}$ と表す．倍数や約数には正の数のみならず負の数も含める．

例　-2 は 6 の約数であり，同時に 6 は -2 の倍数である．よって　　$-2 \mid 6$

また，$b=0$ のとき，$k=0$ とすれば a は任意の整数を取り得る．よって，すべての整数は 0 の約数であり，0 はすべての整数の倍数である．

□２つ以上の整数に共通な約数を，それらの整数の**公約数**という．公約数のうち最大のものを**最大公約数**という．公約数は最大公約数の約数である．２つの整数 a，b の最大公約数が 1 であるとき，a と b は**互いに素**であるという．

□２つ以上の整数に共通な倍数を，それらの整数の**公倍数**という．公倍数のうち正で最小のものを**最小公倍数**という．公倍数は最小公倍数の倍数である．

□1 と自分自身以外に約数をもたない正の整数を**素数**という．1 は素数ではない．

□また，1 より大きい整数で素数でないものを**合成数**という．合成数は，素数の積の形としてただ 1 通りに表せる（積の順序は無視する）．このように素数の積の形で表すことを**素因数分解**するという．

⇒　C&U [1]

[2]　整数の割り算と商，余り

□整数 a を正の整数 b で割ったときの商を q，余りを r とすると

$$a=bq+r,\ 0 \leqq r < b$$

を満たす整数 q，r がただ 1 通りに定まる．これを**除法の原理**という．

例　7 を 2 で割ったときの商は 3，余りは 1 であることより　$7=2\times3+1$　と表せる．また，$-25=3\cdot(-9)+2$　より，-25 を 3 で割ったときの商は -9，余りは 2 である．

⇒　C&U [2]

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1 (1) $\sqrt{\dfrac{756}{n}}$ が自然数になるような自然数 n をすべて求めよ．

(2) 108，360，900 の最大公約数と最小公倍数を求めよ．

2 a，b を整数とする．a を 7 で割った余りが 2，b を 7 で割った余りが 5 である．このとき，次の数を 7 で割ったときの余りを求めよ．

(1) $3a+b$　　(2) ab　　(3) a^2+b^2

< Note >

第47講　整数の性質(1)

1　次の(A)，(B)，(C)を満たす3つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．ただし，$a<b<c$ とする．

(A)　a，b，c の最大公約数は6

(B)　b と c の最大公約数は24，最小公倍数は144

(C)　a と b の最小公倍数は240

< Note >

2　n は整数とする．次のことを証明せよ．

(1)　n^2+7n+4 は偶数である．

(2)　n^2+1 は 3 の倍数でない．

(3)　n^2 を 6 で割ったときの余りは 2，5 にならない．

< Note >

3　a，b，c を整数とし，$a^2+b^2=c^2$　とする．次の問いに答えよ．

(1)　a，b のうち，少なくとも1つは3の倍数であることを示せ．

(2)　a，b，c が互いに素であるとき，c は奇数であることを示せ．

＜ Note ＞

第 47 講　整数の性質(1)

(1)　最大公約数が 5，最小公倍数が 75 である 2 つの自然数 a，b $(a<b)$ は

$(a,\ b)=($ ア $,$ イウ $),\ ($ エオ $,$ カキ $)$ である．

(2)　a，b を整数とする．a を 5 で割ると 2 余り，b を 5 で割ると 3 余る．$a+b$，ab，a^2+b^2 を 5 で割った余りはそれぞれ ク ，ケ ，コ である．

< Note >

第 47 講　整数の性質(1)

【CHECK & UP】

1 (1) $\sqrt{\dfrac{756}{n}}$ が自然数になるのは，$\dfrac{756}{n}$ がある自然数の平方数になるとき．

$756=2^2\cdot 3^3\cdot 7$　より　題意を満たすのは

$n=3\cdot 7,\ 3^3\cdot 7,\ 2^2\cdot 3\cdot 7,\ 2^2\cdot 3^3\cdot 7$

つまり　$n=$ **21，84，189，756** のときである．

(2) $108=2^2\cdot 3^3$

$360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$

$900=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2$

よって　最大公約数は　$2^2\cdot 3^2=$ **36**

最小公倍数は　$2^3\cdot 3^3\cdot 5^2=$ **5400**

> 最大公約数，最小公倍数を求めるには，まずはそれぞれの数を素因数分解して，それぞれに含まれる素因数およびその指数を求める．
> 　最大公約数は，その共通な素因数で指数が最も小さいものを掛け合わせたものであり，最小公倍数は，すべての素因数で指数が最も大きいものを掛け合わせたものである．

2 a は 7 で割ると 2 余る数であることより

$a=7k+2$（k：整数）と表せる．

b は 7 で割ると 5 余る数であることより

$b=7l+5$（l：整数）と表せる．

> 「除法の原理」によってある数で割ったとき余りがある数を表現できる．
> 　答えとしての「余り」は，割る数より小さい正の数で表す．ただし，除法の原理によって数を表現する場合はその限りではない．例えば $7k+2$ と $7k-5$ はともに 7 で割ると 2 余る数である．

(1) $3a+b=3(7k+2)+(7l+5)=7(3k+l)+11$

$=7(3k+l+1)+4$　　よって　余り **4**

(2) $ab=(7k+2)(7l+5)=7(7kl+5k+2l)+10=7(7kl+5k+2l+1)+3$

よって　余り **3**

(3) $a^2+b^2=(7k+2)^2+(7l+5)^2=7(7k^2+4k+7l^2+10l)+29$

$=7(7k^2+4k+7l^2+10l+4)+1$

よって　余り **1**

第 47 講　整数の性質(1)

1　次の(A)，(B)，(C)を満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．ただし，$a<b<c$ とする．

(A)　$a,\ b,\ c$ の最大公約数は 6

(B)　b と c の最大公約数は 24，最小公倍数は 144

(C)　a と b の最小公倍数は 240

(B)より，b と c の最大公約数は 24 であるから

$b=24b',\ c=24c'$　($b',\ c'$ は互いに素な自然数，$b'<c'$) とおける．

(B)より，$24b'c'=144$　よって　$b'c'=6$

$b'<c'$ より　$(b',\ c')=(1,\ 6),\ (2,\ 3)$ のみ

よって　$(b,\ c)=(24,\ 144),\ (48,\ 72)$

(C)より，a と b の最小公倍数は　$240=2^4\cdot3\cdot5$

$b=24=2^3\cdot3$ のとき，$a=2^4\cdot3\cdot5$　であるが，

これは $a<b$ を満たさず不適．

$b=48=2^4\cdot3$ のとき，$a=2^p\cdot3\cdot5$ ($p=1,\ 2,\ 3,\ 4$)

このうち，$a<b$ を満たすのは $p=1$ のときのみ．このとき $a=30$

したがって　$(a,\ b,\ c)=$**(30，48，72)**　これは(A)を満たす．

2　n は整数とする．次のことを証明せよ．

(1)　n^2+7n+4 は偶数である．

(2)　n^2+1 は 3 の倍数でない．

(3)　n^2 を 6 で割ったときの余りは 2，5 にならない．

以下，k を整数とする．

(1)　$n=2k$ のとき

$$n^2+7n+4=(2k)^2+7\cdot2k+4=2(2k^2+7k+2)$$

$n=2k+1$ のとき

$$n^2+7n+4=(2k+1)^2+7(2k+1)+4=2(2k^2+9k+6)$$

よっていずれの場合も n^2+7n+4 は偶数である．

(2)　$n=3k$ のとき

$$n^2+1=(3k)^2+1=3\cdot3k^2+1$$

$n=3k+1$ のとき

$$n^2+1=(3k+1)^2+1=3(3k^2+2k)+2$$

$n=3k+2$ のとき

$$n^2+1=(3k+2)^2+1=3(3k^2+4k+1)+2$$

よっていずれの場合も　n^2+1 は 3 の倍数ではない．

(3)　$n=6k$ のとき

$n^2=(6k)^2=6\cdot 6k^2$

$n=6k\pm 1$ のとき

$n^2=(6k\pm 1)^2=6(6k^2\pm 2k)+1$　（複号同順）

$n=6k\pm 2$ のとき

$n^2=(6k\pm 2)^2=6(6k^2\pm 4k)+4$　（複号同順）

$n=6k+3$ のとき

$n^2=(6k+3)^2=6(6k^2+6k+1)+3$

よって n^2 を 6 で割ったときの余りは 0，1，3，4 のいずれか，つまり 2，5 にならない．

3　a，b，c を整数とし，$a^2+b^2=c^2$　とする．次の問いに答えよ． (1)　a，b のうち，少なくとも 1 つは 3 の倍数であることを示せ． (2)　a，b，c が互いに素であるとき，c は奇数であることを示せ．

(1)　k を整数とする．

$n=3k$ のとき　$n^2=(3k)^2=3\cdot 3k^2$

$n=3k\pm 1$ のとき　$n^2=(3k\pm 1)^2=3(3k^2\pm 2k)+1$

よって　n が 3 の倍数のとき，n^2 を 3 で割った余りは 0,

n が 3 の倍数でないとき，n^2 を 3 で割った余りは 1 である．

したがって，整数 c^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である．

ここで，a，b がともに 3 の倍数でないとすると，

a^2，b^2 を 3 で割った余りは 1 より，a^2+b^2 を 3 で割った余りは 2

よって，$a^2+b^2=c^2$ であることに反する．

ゆえに　a，b のうち少なくとも 1 つは 3 の倍数である．

(2)　a，b は互いに素より a，b がともに偶数であることはない．

ここで　$n=2k$ のとき　$n^2=4k^2$

$n=2k+1$ のとき　$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$

よって n^2 を 4 で割った余りは 0 か 1 であり，a^2，b^2，c^2 に対しても同様である．

a，b がともに奇数のとき，a^2，b^2 を 4 で割った余りは 1 より

a^2+b^2 を 4 で割った余りは 2 となり，$a^2+b^2=c^2$ であることに反する．

よって　a，b は偶奇を異にする．

対称性より a を偶数，b を奇数としても一般性を失わない．このとき a^2+b^2 は奇数より c^2 は奇数である．したがって，整数 c は奇数である．

第 47 講　整数の性質(1)

(1)　最大公約数が 5，最小公倍数が 75 である 2 つの自然数 a，b $(a<b)$ は

$(a,\ b)=($ ア , イウ $)$，$($ エオ , カキ $)$ である．

(2)　a，b を整数とする．a を 5 で割ると 2 余り，b を 5 で割ると 3 余る．$a+b$，ab，a^2+b^2 を 5 で割った余りはそれぞれ ク ， ケ ， コ である．

(1)　最大公約数が 5 である 2 数 a，b $(a<b)$ は

$a=5a'$，$b=5b'$　($a'b'$ は $a'<b'$ を満たす互いに素の自然数）と表される．

このとき，a，b の最小公倍数は $5a'b'$ であることより

$5a'b'=75$　　つまり　$a'b'=15$

$a'b'$ は $a'<b'$ を満たす互いに素の自然数であることより

$(a',\ b')=(1,\ 15)$，$(3,\ 5)$

したがって，$(a,\ b)=$**(5，75)，(15，25)**

(2)　a，b は整数 m，n を用いて

$a=5m+2$，$b=5n+3$

と表される．

$a+b=(5m+2)+(5n+3)=5(m+n+1)$

よって 5 で割った余りは　**0**

$ab=(5m+2)(5n+3)=25mn+15m+10n+6=5(5mn+3m+2n+1)+1$

よって　5 で割った余りは　**1**

$a^2+b^2=(5m+2)^2+(5n+3)^2$

$=25m^2+20m+25n^2+30n+13$

$=5(5m^2+4m+5n^2+6n+2)+3$

よって　5 で割った余りは　**3**